Title	不動点定理とminimax定理(確率ゲーム理論とその周辺)
Author(s)	高橋, 渉
Citation	数理解析研究所講究録 (1991), 741: 116-136
Issue Date	1991-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/102119
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
741 巻 1991 年 116-136

不動点定理とminimax定理

東工大 理 高橋 渉(Wataru Takahashi)

点を集合にうつす写像を多価写像(multivalued mapping)というが，この写像に対する不動点はつぎのように定義される．Xをある集合とし，TをXから2^X(Xの部分集合の全体)への写像とする．このとき，$x_0 \in Tx_0$となる点x_0をTの不動点(fixed point)という．不動点理論を含めた多価写像の理論は理論経済学者や工学者の要請により始められたものであるが現在では数学の分野(特に，非線形の分野)で非常に重要なものとなっており，多くの数学者や応用数学者が盛んに研究するようになっている．一方 minimax 定理は理論経済学の分野で始められたものであるが，今ではそれが最適化理論と結びついて応用数学の分野ではもちろんのこと純粋数学を研究する上でも非常に重要なものとなっている．ここではFan-Browder の定理を拡張する集合値写像の不動点定理より始まり，種々のminimax 定理及びそれに関連する問題について書いていきたい．

§1. 集合値写像の不動点定理とFanのminimax inequality

まず初めに，1の分解定理とBrouwerの不動点定理を用いて，Fan-Browderの不動点定理の拡張定理であるつぎの定理を証明しておこう．

定理1　Yを線形位相空間Eの凸集合とし，XをEの凸部分集合で，$X\subset Y$となるものとする．AをXから2^Y（Yの部分集合の全体）への写像で，任意の$y\in Y$に対して，$A^{-1}y$がつねに凸集合となっているものとする．BをXから2^Yへの写像でつぎの3つの条件：

(1) 任意の$x\in X$に対して，$Bx\subset Ax$である；

(2) 任意の$y\in X$に対して，$B^{-1}y\neq\phi$である；

(3) 任意の$x\in X$に対して，Bxは開集合である

を満たすとする．このとき，もしXの空でない部分集合X_0で$Y\setminus\bigcup_{x\in X_0}Bx$がコンパクトまたは空であり，しかも$X_0$は$Y$のコンパクト凸集合$C$の中に含まれるものが存在するならば，$x_0\in Ax_0$となる$x_0\in X$が存在する．

証明　$\bigcup_{x\in X_0}Bx=Y$のケースにおいては，$\{Bx:x\in X_0\}$はCの開被覆になっている．Cはコンパクトなので，$C\subset\bigcup_{i=1}^{n}Bx_i$となるような$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset X_0$が存在する．ここで，1の分解定理を用いて，$C$の有限開被覆$\{Bx_1,Bx_2,\cdots,Bx_n\}$に対応する1の分解$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$が存在する．$C$上の写像$p$

をこの β_i を用いて

$$p(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)x_i \quad (\forall y\in C)$$

で定義する．すると，すべての $y\in C$ に対して $p(y)\in A^{-1}y$ である．なぜなら，$y\in C$ に対して $\beta_i(y)\neq 0$ ならば $y\in Bx_i$ である．よって $B^{-1}y\ni x_i$ である．(1) より $B^{-1}y\subset A^{-1}y$ であり，$A^{-1}y$ は凸集合であるから，$p(y)\in A^{-1}y$ である．$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ によって張られる凸集合を C_0 とすると，p は C_0 から C_0 への連続写像である．ここで Brouwer の不動点定理を用いると

$$px_0=x_0$$

となるような $x_0\in C_0$ が存在する．よって $x_0\in A\,px_0=Ax_0$ を得る．だから $x_0\in Ax_0$ である．

$Y\setminus\bigcup_{x\in X_0}Bx$ がコンパクトであるとしよう．このとき，

$$\bigcup_{i=1}^{n}Bx_i\supset Y\setminus\bigcup_{x\in X_0}Bx$$

となるような $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset X\setminus X_0$ が存在する．

$$X_1=X_0\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

とし，$C_1=co\{C\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})$ とすると C_1 は Y のコンパクト凸集合であり，$\bigcup_{x\in X_1}Bx=Y$ である．そこで上の証明のようにして $Ax_0\ni x_0$ となるような $x_0\in X$ を得る．

X をベクトル空間 E の凸集合とし，f を X 上の実数値関数とする．このとき，すべての実数 $c\in\mathbb{R}$ に対して

$$\{x\in X\ ;\ f(x)\leqq c\}$$

が凸集合ならば，f は quasi-convex であるといわれる．また
すべての $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\{x \in X : f(x) \geqq c\}$ が凸集合ならば
f は quasi-concave であるといわれる．

定理2　Y を線形位相空間 E の凸集合とし，X を Y の空でない凸部分集合とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ とし，f, g を $X \times Y$ 上のつぎの4つの条件を満たす実数値関数とする．

(1)　$g(x, y) \leqq f(x, y)$　$(\forall (x, y) \in X \times Y)$；

(2)　f は第1変数に関して quasi-concave である；

(3)　g は第2変数に関して下半連続である；

(4)　X は $\{y \in Y : g(x, y) \leqq \alpha, \forall x \in X_0\}$ がコンパクト集合であり，しかも X_0 は Y のコンパクト凸集合 C に含まれるような部分集合 X_0 をもつ．

このとき，すべての $x \in X$ に対して $g(x, y_0) \leqq \alpha$ となるような $y_0 \in Y$ が存在するか，$f(x_0, x_0) > \alpha$ となるような $x_0 \in X$ が存在する．

証明　任意の $x \in X$ に対して，$Ax = \{y \in Y : f(x, y) > \alpha\}$，$Bx = \{y \in Y : g(x, y) > \alpha\}$ とする．もし，任意の $y \in Y$ に対して，$g(x, y) > \alpha$ となるような $x \in X$ が存在するとすると，$B^{-1}y$ はすべての $y \in Y$ に対して空でない．そこで，定理1を用いて，$Ax_0 \ni x_0$ となるような $x_0 \in X$ が存在する．これは $f(x_0, x_0) > \alpha$ を意味する．

定理1と同様の方法でつぎの定理も証明することができる.

定理3　Yを線形位相空間Eのコンパクト集合とし,XをEの凸部分集合で,$X \subset Y$となるものとする. AをXから2^Yへの写像で,任意の$y \in Y$に対して$A^{-1}y$がつねに凸集合となっているものとする. このとき,Xから2^Yへの写像Bでつぎの3つの条件:

(1)　任意の$x \in X$に対して,$Bx \subset Ax$である;

(2)　任意の$y \in Y$に対して,$B^{-1}y \neq \phi$である;

(3)　任意の$x \in X$に対して,Bxは開集合である

を満たすものが存在するならば,$x_0 \in Ax_0$となる$x_0 \in X$が存在する.

この定理から,Fanのminimax inequalityを拡張するつぎの定理を得ることができる.

定理4　Yを線形位相空間Eのコンパクト集合とし,XをYの凸集合とする. f, gを$X \times Y$上のつぎの3つの条件を満たす実数値関数とする.

(1)　$g(x, y) \leqq f(x, y)$　$(\forall (x, y) \in X \times Y)$;

(2)　fは第1変数に関してquasi-concaveである;

(3)　gは第2変数に関して下半連続である.

このとき,

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} g(x, y) \leqq \sup_{x \in X} f(x, y).$$

§2. minimax定理

この節では§1で得られた結果を用いて種々のminimax定理を証明する．定理3を用いてまずSionのminimax定理を証明しよう．

定理5 (Sion)　XとYを線形位相空間E_1とE_2のコンパクトな凸集合とする．fをつぎの(1)と(2)を満たす$X\times Y$上の実数値関数とする．

(1)　$y\in Y$を固定したとき，xの関数$f(x,y)$は下半連続で，quasi-convexである；

(2)　$x\in X$を固定したとき，yの関数$f(x,y)$は上半連続でquasi-concaveである．

このとき，

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y)=\max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y).$$

証明　結論がいえないとしよう．すなわち

$$\max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y)<c<\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y)$$

としよう．いま$x\in X$と$y\in Y$に対して

$$A_x=\{y'\in Y:f(x,y')<c\},\quad B_y=\{x'\in X:f(x',y)>c\}$$

とし，$X\times Y$から$2^{X\times Y}$への写像を$T(x,y)=B_y\times A_x$で定義すると，Tは定理3の仮定を満たしているからTの不動点(x_0,y_0)が存在する．これは$c<f(x_0,y_0)<c$を意味し，矛盾である．よって定理は証明できた．

つぎにFanのシステム定理に関係するつぎの定理を証明しよう（[4]を参照せよ）．

定理6　Xを線形位相空間Eのコンパクト凸集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$をX上の下半連続な実数値関数とする．$c \in \mathbb{R}$とし，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$となる$n$個の非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$に対して，$X$上の関数$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$はquasi-convexであり，しかも$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leqq c$となる$y \in X$が存在するとする．このとき

$$f_i(x_0) \leqq c \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

となるような$x_0 \in X$が存在する．

証明　$G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$とする．結論が真でないとすると，$\bigcup_{i=1}^{n} G_i = X$を得る．この有限開被覆に対する1の分解を$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$とし，

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(y) \quad (\forall (x, y) \in X \times X)$$

とすると，fはxの関数として連続であり，yの関数としてquasi-convexである．しかも$f(x, y)$は$X \times X$上の下半連続関数であるから$f(x, x) \geqq \alpha_0 > c$ $(\forall x \in X)$となるα_0が存在する．ここで定理4を用いると

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_i(y) = f(x_0, y) \geqq \alpha_0 > c \quad (\forall y \in X)$$

となる$x_0 \in X$を得る．これは仮定に反する．よって証明は完了する．

定理6を用いるとSionのminimax定理と関係のあるつぎの

minimax定理を証明することができる．

定理7　Xを線形空間の凸集合とし，Yを線形位相空間のコンパクト凸集合とする．fを$X\times Y$上のつぎの条件を満たす実数値関数とする．

(1)　fは第1変数に関してaffineである；

(2)　fは第2変数に関して下半連続でquasi-convexである．

このとき，

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)=\sup_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y).$$

証明　$c=\sup\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} f(x,y)$とし，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$を$X$の有限部分集合とする．また$\{\alpha_i\}_{i=1}^n$を$\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$を満たす非負の数とする．このとき仮定から

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i f(x_i,y)=f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i,\ y\right)$$

なので

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i f(x_i,y_0)=f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i,\ y_0\right)\leqq c$$

となる$y_0\in Y$が存在する．ここで定理6を用いると

$$f(x_i,z)\leqq c\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

となる$z\in Y$が存在する．Yはコンパクトなので

$$\bigcap_{x\in X}\{y\in Y : f(x,y)\leqq c\}\neq\phi$$

である．これは

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)\leqq c=\sup_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)$$

を意味する．逆の不等式は明らか．

この節の最後に，Fan の minimax 定理から出発して，最近 Simons によって得られた凸性なしの minimax 定理を得る過程を述べておこう．その前に定義を与えておく．

X，Y を空でない集合とし，f を $X\times Y$ 上の実数値関数とする．このとき，$f(x,y)$ が第1変数に関して convexlike であるとは，任意の $x_1,x_2\in X$ と α $(0\leqq\alpha\leqq1)$ に対して，ある $x_0\in X$ が存在して，不等式

$$f(x_0,y)\leqq\alpha f(x_1,y)+(1-\alpha)f(x_2,y)\quad(\forall y\in Y)$$

がつねに成立することである．concavelike についても不等式

$$f(x_0,y)\geqq\alpha f(x_1,y)+(1-\alpha)f(x_2,y)\quad(\forall y\in Y)$$

で同様に定義できる．

定理8（Fan）　X を線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，Y を単なる集合とする．f を $X\times Y$ 上の実数値関数でつぎの条件を満たすものとする．

(1)　$y\in Y$ を固定したとき，x の関数 $f(x,y)$ は下半連続でしかも凸関数である；

(2)　$f(x,y)$ は第2変数に関して concavelike である．

このとき，

$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}f(x,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}f(x,y).$$

この定理は定理6を用いても証明できるし，Hahn-Banach

の定理から得られる分離定理からも証明できる．もっと詳しくいうならば定理8はn次元空間における分離定理を用いて証明できるのである．これを用いてつぎの定理が証明できる．

定理9　Xをある集合，$f_1, f_2, \cdots, f_n$をX上の実数値関数とする．$I=\{1, 2, \cdots, n\}$とし，$X \times I$上の関数Fを

$$F(x, i) = f_i(x) \quad (\forall i \in I, \forall x \in X)$$

で定義する．Fは第1変数に関してconvexlikeであるとする．$c \in \mathbb{R}$とする．もし$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$となる$n$個の非負な数$\{\alpha_i\}$に対して，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_0) \leqq c$となる$x_0 \in X$が存在するならば

$$\inf_{x \in X} \max_i f_i(x) \leqq c .$$

定理9はSimons [12] のminimax定理を証明するのに有効である．Xを空でない集合とし，

$$F(X) = \{X_0 : \phi \neq X_0 \subset X,\ X_0 \text{は有限集合}\}$$

とする．

定理10 (Simons)　X, Yを任意の集合とし，f, gを$X \times Y$上の実数値関数で，つぎの(1), (2), (3)の条件を満たすものとする．

(1)　$f(x, y) \leqq g(x, y) \quad (\forall (x, y) \in X \times Y)$;

(2)　fは第2変数に関してconvexlikeである；

(3)　gは第1変数に関してconcavelikeである．

このとき，つぎの(i), (ii), (iii)が成立する．

(i) $X_0 \in \mathcal{F}(X)$, $Y_0 \in \mathcal{F}(Y)$ に対して

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0} f(x,y) \leqq \sup_{x\in X}\min_{y\in Y_0} g(x,y).$$

(ii) $\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y) > -\infty$ ならば，$X_0 \in \mathcal{F}(X)$ に対して

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0} f(x,y) \leqq \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

(iii) Y がコンパクト集合で，f が第2変数に関して下半連続関数ならば

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \leqq \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

§3. 位相的minimax定理

この節では不動点定理や分離定理を用いることなしのminimax定理を議論する．位相的minimax定理に関する最近の結果は小宮[8]を参照のこと．

定理11 Xをコンパクト空間とし，$\mathcal{F}$をX上の下半連続関数の族とする．$c = \sup_f \min_x f(x)$ とし，$A(f) = \{x : f(x) \leqq c\}$ とすると，つぎの条件は同値である．

(1) $\{A(f) : f \in \mathcal{F}\}$ は有限交叉性をもつ；

(2) $$\sup_f \min_x f(x,y) = \min_x \sup_f f(x).$$

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\{A(f) : f \in \mathcal{F}\}$ が有限交叉性をもち，Xはコンパクトなので $\bigcap_f A(f) \neq \phi$．$x_0 \in \bigcap_f A(f)$ とする．すべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $f(x_0) \leqq c$ なので $\sup_f f(x_0) \leqq c$ である．よって

$$\min_x \sup_f f(x) \leqq \sup_f f(x_0) \leqq \sup_f \min_x f(x).$$

逆の不等式は明らかである．

(2) ⇒ (1)　$\min_x \sup_f f(x) = \sup_f \min_x f(x) = c$

は $\sup_f f(x_0) = c$ となる $x_0 \in X$ の存在を意味するので，すべての $f \in F$ に対して $f(x_0) \leqq c$ である．よって $\{A(f) : f \in F\}$ は有限交叉性をもつ．

これを用いてつぎの定理が証明できる．

定理12　X をコンパクト空間とし，F を X 上の下半連続関数の族でつぎの条件を満たすものとする．

(1) 任意の $f, g \in F$ に対して，$f + g \leqq 2h$ となる $h \in F$ が存在する；

(2) $c = \sup_f \min_x f(x)$ とするとき，集合族

$$\{\{x ; f(x) \leqq b\} ; (f, b) \in F \times \{b : c \leqq b\}\}$$

の finite intersection が connected.

このとき，

$$\sup_f \min_x f(x) = \min_x \sup_f f(x).$$

証明は数学的帰納法を用いるが，それほど簡単ではない．

つぎに minimax の考えを Fuzzy 集合の議論に持ち込むことを試みよう．普通の集合論ではつぎの命題は同値となる．

(1) X の空でない部分集合の族 $\{A_\alpha\}$ に対して，$\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \phi$.

(2) $$\inf_\alpha \sup_{x \in X} 1_{A_\alpha}(x) = \sup_{x \in X} \inf_\alpha 1_{A_\alpha}(x).$$

ただし，1_A は A の characteristic function である．

しかしながら Fuzzy 集合に対しては(1)と(2)の命題は同値とはならない．実際，$A_n(x)=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると

$$\inf_n \sup_{x\in X} A_n(x) = \sup_{x\in X} \inf_n A_n(x)$$

であるが

$$\inf_n A_n(x) = 0 \quad (\forall x\in X)$$

となってしまうからである．そこで，Fuzzy 集合に対する minimax 定理を証明することにしよう．その前に定義を与えておく．

X を空でない集合とし，$\{A_\alpha\}$ を X 上の Fuzzy 集合の族とする．このとき，$\{A_\alpha\}$ が down-directed であるとは，任意の $A_1, A_2 \in \{A_\alpha\}$ に対して，$A_3 \subset A_1$，$A_3 \subset A_2$ となるような A_3 が $\{A_\alpha\}$ の中に存在することである．また $\{A_\alpha\}$ が minimax property をもつとは

$$\inf_\alpha \sup_{x\in X} A_\alpha(x) = \sup_{x\in X} \inf_\alpha A_\alpha(x)$$

が成り立つことである．

定理13　X を位相空間とし，$\{A_\alpha\}$ を X 上の空でないコンパクト Fuzzy 集合の族とする．このとき，つぎの2つの条件は同値である．

(1)　$\{A_\alpha\}$ は minimax property をもつ；

(2)　$0<r<1$ となる r と $\max_{x\in X} \min_i A_i(x) < r$ となる $\{A_\alpha\}$ の finite family $\{A_i\}$ に対して，$\max_{x\in X} B(x) < r$ となる $B\in\{A_\alpha\}$

が存在する．

証明　(1)⇒(2)　$0<r<1$ となる r と $\{A_\alpha\}$ の finite family $\{A_i\}$ に対して，$\max_{x\in X}\min_i A_i(x)<r$ となるとしよう．(1)から

$$\inf_\alpha \max_x A_\alpha(x) = \max_x \inf_\alpha A_\alpha(x)$$
$$\leqq \max_x \inf A_i(x) < r$$

となるから

$$\max_x B(x) < r$$

となる $B\in\{A_\alpha\}$ が存在する．

(2)⇒(1)　$\{A_\alpha\}$ のある finite family $\{A_i\}$ に対して

$$\bigcap_i \theta_c(A_i)=\phi$$

としよう．ただし，$\theta_c(A_i)=\{x\in X : A_i(x)\geqq c\}$，$c=\inf_\alpha\max_x A_\alpha(x)$ である．このとき，$\min_i A_i(x)<c$ $(^\forall x\in X)$ であるので，

$$\max_x \min_i A_i(x) < c$$

である．(2) を用いると

$$c=\inf_\alpha \max_x A_\alpha(x) \leqq \max_x B(x) < c$$

となるような $B\in\{A_\alpha\}$ が存在する．これは矛盾である．よって，$\{\theta_c(A_\alpha)\}$ は有限交叉性をもつ．あとは定理11を用いることによって (1) がいえる．

上の定理を用いるとつぎの定理がいえる．

定理14　X を位相空間とする．このとき，つぎの2つの条件は同値である．

(1) Xはコンパクトである；

(2) Xの空でない閉なFuzzy集合の族がdown-directedであるならば，それはminimax propertyをもつ．

証明 (1)⇒(2) Xをコンパクトであるとし，$\{A_\alpha\}$をXの空でない閉なFuzzy集合の族でdown-directedであるとしよう．$c=\inf_\alpha \max_x A_\alpha(x)$とし，$\{\theta_c(A_\alpha)\}$が有限交叉性を満たすことを示そう．$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$を$\{A_\alpha\}$のfiniteな族とする．このとき仮定より，$B\subset A_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$となるBが存在する．

$$c\leqq \max_x B(x)$$

から $x_0\in\theta_c(B)$となる$x_0\in X$が存在する．よって

$$A_1(x_0), A_2(x_0), \cdots, A_n(x_0)\geqq B(x_0)\geqq c$$

である．これは$\bigcap_{i=1}^n \theta_c(A_i)\neq\phi$を意味する．定理11によって，$\{A_\alpha\}$はminimax propertyをもつ．

(2)⇒(1) $\Sigma=\{F\}$を有限交叉性をもつXの通常の閉集合の族とし，Σ^*をΣに属するF_iのfinite intersection $\bigcap_{i=1}^n F_i$の特性関数の族とする．このとき，Xの空でない閉なFuzzy集合の族Σ^*はdown-directedである．仮定によって，

$$\inf_{A\in\Sigma^*}\sup_{x\in X} A(x)=\sup_{x\in X}\inf_{A\in\Sigma^*} A(x)$$

である．また，

$$\inf_{A\in\Sigma^*}\sup_{x\in X} A(x)=1$$

であるので，$\inf_{A\in\Sigma^*} A(x_0)>\frac{1}{2}$となるような$x_0\in X$を得る．よっ

て，$1_F(x_0)=1$ ($^\forall F\in\Sigma$) である．これは $\bigcap_{F\in\Sigma}F\neq\phi$ を意味する．よって X はコンパクトである．

§4. 変分不等式

この節では不動点定理またはminimax定理を用いて特に変分不等式に関する定理を議論する．

X を局所凸な線形位相空間 E の閉で凸な集合とし，T を X から E^* への写像とする（以後，局所凸は省く）．このとき，

$$(y-x,\ Tx)\geq 0\quad(^\forall y\in X)$$

を満たす X の元 x を変分不等式の解という．また X の閉な凸錐とし，X^* を X の polar，すなわち

$$X^*=\{y\in E^*:(x,y)\geq 0,\ ^\forall x\in X\}$$

とするとき，X から E^* への写像 T に対して

$$Tx\in X^*,\quad (x,Tx)=0$$

を満たす X の元 x を相補性問題の解という．X を線形位相空間 E の凸集合とし，E^* は E の共役空間とする．X から E^* への写像 T が monotone であるとは

$$(x-y,\ Tx-Ty)\geq 0\quad(^\forall x,y\in X)$$

を満たすときをいう．また $T:X\to E^*$ が hemicontinuous であるとは，任意の $u,v\in X$ に対して，$[0,1]$ から E^* への写像

$$t\longmapsto T(tv+(1-t)u)$$

がつねに連続であるときをいう．E^* の位相は弱*位相である．

Kato [6] は有限次元 Banach 空間 E 上で定義された monotone で hemicontinuous な写像は E 上で連続であることを証明している．定理 3 を用いるとつぎの定理が証明できる．

定理 15　X を線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし T を X から E^* への monotone 写像とする．このとき，

$$(x-x_0,\ Tx)\geqq 0\quad(\forall x\in X)$$

となる $x_0\in X$ が存在する．

この定理と写像 T が hemicontinuous であることを使うとよく知られたつぎの変分不等式の定理が得られる．

定理 16　X を線形位相空間 E のコンパクトな凸集合とし，T を X から E^* への monotone で hemicontinuous な写像とする．このとき，

$$(x-x_0,\ Tx_0)\geqq 0\quad(\forall x\in X)$$

となる $x_0\in X$ が存在する．

また，upper semicontinuous な集合値写像に対しては，mini max property と関連してつぎの 2 つの定理が証明できる．

定理 17　X を（局所凸）線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とする．T を X から 2^{E^*} への upper semicontinuous な集合値写像とし，任意の $x\in X$ に対して，Tx は空でないコンパクト集合とする．このとき，もし $x\in X$ に対して

$$\min_{y\in X}\max_{w\in Tx}(w,\ x-y)=\max_{w\in Tx}\min_{y\in X}(w,\ x-y)$$

が成り立つならば

$$(w_0, x_0 - y) \geqq 0 \quad (\forall y \in X)$$

となるような $x_0 \in X$ と $w_0 \in Tx_0$ が存在する.

定理18　X を n 次元 Euclidean 空間 E のコンパクト凸集合とし, T を X から 2^E への upper semicontinuous 写像とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して, Tx は空でないコンパクト集合とし,

$$\min_{y \in X} \max_{w \in Tx} (w - x, x - y) = \max_{w \in Tx} \min_{y \in X} (w - x, x - y)$$

が成り立つならば, $(w_0 - x_0, x_0 - y) \geqq 0$ $(\forall y \in X)$ となるような $x_0 \in X$ と $w_0 \in Tx_0$ が存在する.

References

[1] Browder, F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283-301.

[2] Fan, K., Minimax theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 42-47.

[3] Fan, K., On systems of linear inequalities, in Linear Inequalities and Related Systems, Ann. of Math. Stud., 38, 99-156, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1956).

[4] Fan, K., Existence theorems and extreme solutions for

inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205-217.

[5] Kakutani, S., A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J., 8 (1941), 457-459.

[6] Kato, T., Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 548-550 and 73 (1967), 886-889.

[7] Kelly, J. L., Namioka, I. et al., Linear topological spaces, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1963).

[8] Komiya, H., 位相的minimax定理, 京大数理解析研究所講究録, to appear.

[9] Komiya, H. and W. Takahashi, Systems of linear inequalities on normed linear spaces, Linear & Multilinear Algebra, 13 (1983), 267-279.

[10] Sakamaki, K. and W. Takahashi, Systems of convex inequalities and their applications, J. Math. Anal. Appl., 70 (1979), 445-459.

[11] Shioji, N. and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, J. Math. Anal. Appl., 135 (1988), 383-398.

[12] Simons, S., Minimax and variational inequalities. Are

they of fixed point or Hahn-Banach type?, Game theory and Mathematical Economics, North Holland Publishing Company (1981), 379-387.

[13] Sion, M., On general minimax theorems, Pacific J. Math., 8 (1958), 171-176.

[14] Takahashi, M. and W. Takahashi, Separation theorems and minimax theorems for fuzzy sets, J. Optimization Theory & Applications, 31 (1980), 179-194.

[15] Takahashi, W., Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.

[16] Takahashi, W., Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities, J. Optimization Theory & Applications, 24 (1980), 493-508

[17] 高橋 渉，不動点定理とその周辺，三田学会雑誌，73 (1980), 32-68.

[18] Takahashi, W., Recent results in fixed point theory, SEA Bull. Math., 4 (1981), 59-85.

[19] Takahashi, W., Fixed point, Minimax and Hahn-Banach theorems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Soc., 45 (1986), 417-427.

[20] 高橋 渉，非線形関数解析学－不動点定理とその周辺－

近代科学社 (1989).

[21] Terkelsen, F., Some minimax theorems, Math. Scand., 31 (1972), 405-413.